

Kỹ thuật tái sử dụng tần số mềm trong mạng LTE

Lâm Sinh Công, Nguyễn Quốc Tuấn
Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc Gia Hà Nội
Khoa Điện tử - Viễn thông
Email: {congls, tuannq}@vnu.edu.vn

Tóm tắt nội dung—Kỹ thuật tái sử dụng tần số được coi là một trong những kỹ thuật then chốt để tăng dung lượng mạng của hệ thống mạng LTE. Trong bài báo này, kỹ thuật tái sử dụng tần số mềm được mô hình hóa và phân tích dựa theo các khuyến nghị của 3GPP cho mạng LTE. Trong đó, hoạt động của kỹ thuật tái sử dụng tần số được chia thành 2 pha riêng biệt: pha thiết lập và pha truyền tin. Trong pha thiết lập, người dùng sẽ được phân chia dựa trên công suất của tín hiệu nhận được. Trong pha truyền tin, việc truyền tin giữa người truyền và các trạm phát được thực hiện. Đại lượng đặc trưng của hệ thống là xác suất phủ sóng của người dùng sẽ được phân tích bằng các biểu thức toán học và kiểm chứng bằng mô phỏng Monte Carlo. Bài báo này đã đưa ra được một kết luận quan trọng. Đó là việc tăng công suất phát của các trạm có thể sẽ làm suy hao hiệu suất của người dùng.

Index Terms: Xác suất phủ sóng, kỹ thuật tái sử dụng tần số mềm, mạng Poisson, LTE

I. GIỚI THIỆU

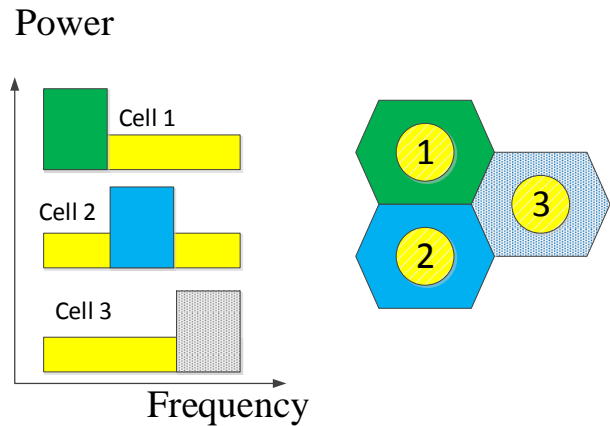
Trong những năm gần đây, mạng thông tin di động có tốc độ tăng trưởng rất nhanh về cả số lượng lẫn lưu lượng trao đổi trên mạng. Theo báo cáo của Cisco [2], số lượng người dùng đã tăng gấp 5 lần trong vòng 15 năm qua. Báo cáo cũng dự đoán rằng đến năm 2020, số lượng thuê bao sẽ đạt đến 5.5 tỉ, tương đương với 70% dân số toàn thế giới. Do đó việc cung cấp nguồn tài nguyên (tần số) cho các thuê bao di động là một vấn đề rất cấp thiết. Trong bối cảnh đó, kỹ thuật tái sử dụng tần số [3]–[5] được 3GPP giới thiệu như là một kỹ thuật khả thi có việc nâng cao hiệu suất sử dụng nguồn tài nguyên của hệ thống.

Một cách tổng quát, kỹ thuật tái sử dụng tần số phân chia nguồn tài nguyên (các khối tài nguyên - RB) thành 2 nhóm tài nguyên như Hình 1. Nhóm thứ nhất được sử dụng để phục vụ người dùng có tỉ số tín hiệu-trên-nhiều-cộng-noise (SINR) trên kênh điều khiển thấp. Nhóm này được gọi là nhóm biên (CE RBs) và người dùng tương ứng được gọi là người dùng bên (CEU). Nhóm còn lại được gọi là nhóm trung tâm (CC RB) dùng để cấp phát cho người dùng trung tâm (CCU) có SINR trên kênh điều khiển cao.

Theo khuyến nghị của 3GPP, hoạt động của kỹ thuật tái sử dụng tần số được chia làm 2 giai đoạn như sau:

- Giai đoạn 1 gọi là quá trình thiết lập, trạm phát sẽ dựa trên tín hiệu SINR trên kênh điều khiển để phân loại người dùng ra CCU và CEU [3].
- Giai đoạn 2 gọi là quá trình truyền tin, dữ liệu được truyền giữa người dùng và trạm phát.

Do kênh điều khiển được chia sẻ và dùng chung cho tất cả các trạm và công suất trên các trạm trên kênh điều khiển là giống nhau. Do đó, mỗi kênh điều khiển chịu ảnh hưởng nhiều từ tất

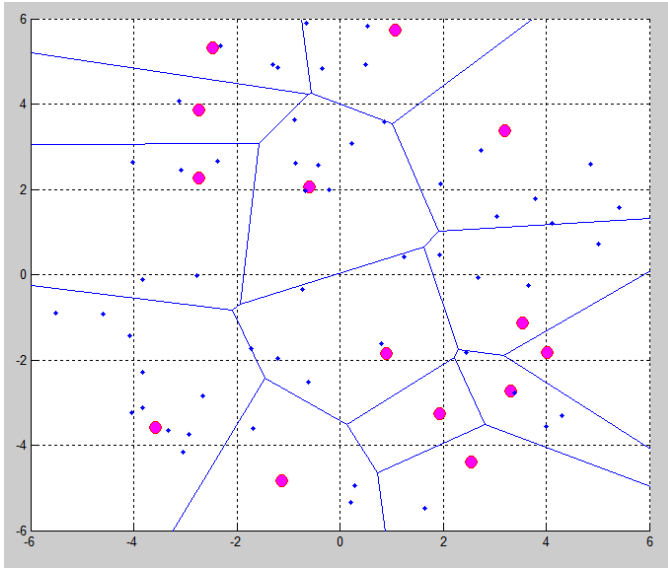


Hình 1

cả các trạm lân cận và công suất của nguồn nhiễu là giống nhau. Bên cạnh đó, kênh dữ liệu ở đường downlink chỉ hoạt động khi trạm phát có dữ liệu để truyền cho người dùng. Lưu ý rằng công suất trên kênh dữ liệu phụ thuộc vào người dùng mà nó phục vụ (CCU hay CEU). Do đó, số lượng nguồn nhiễu và công suất nguồn nhiễu ở giai đoạn 2 sẽ phụ thuộc vào số lượng CCU và CEU đang hoạt động.

Việc đánh giá hiệu suất của mạng sử dụng kỹ thuật tái sử dụng tần số là một yêu cầu cấp thiết. Có rất nhiều phương pháp đánh giá hiệu suất mạng được sử dụng như sử dụng các công cụ mô phỏng như LTE Sim và Network Simulation 3 [5] và sử dụng các mô hình toán học [6]–[8]. Thông thường, các công cụ mô phỏng sẽ đánh giá hoạt động của toàn bộ hệ thống và chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố khác nhau như chuyển giao, lập lịch, tái sử dụng tần số,... Do đó, các công cụ mô phỏng có thể không cho ta biết được chính xác ảnh hưởng của các kỹ thuật tái sử dụng tần số. Gần đây, mô hình xác suất thống kê trong đó các trạm được phân bố theo phân bố Poisson không gian (gọi tắt là PPP) [9]–[11] được sử dụng rộng rãi để đánh giá hiệu suất của mạng LTE.

Hiện nay, rất nhiều kết quả về đánh giá hiệu suất của mạng LTE sử dụng kỹ thuật tái sử dụng tần số dựa theo mô hình PPP được trình bày trong các báo cáo khoa học chuyên ngành. Rất nhiều điều kiện khác nhau như việc phân chia CC RBs và CE RBs, phân chia người dùng, xác định công suất phát đã được xem xét và đánh giá [12]–[14]. Bên cạnh đó các môi điều kiện



Hình 2: Mô hình mạng PPP

khác nhau của môi trường truyền sóng như cá mô hình suy hao và fading đã được tập trung nghiên cứu [15], [16]. Tuy nhiên trong các công bố đó, các khuyến nghị của 3GPP về hoạt động của mạng LTE cũng như kỹ thuật tái sử dụng tần số chưa được theo sát một cách chặt chẽ. Cụ thể như:

- Nguyên lý hoạt động 2 pha của kỹ thuật tái sử dụng tần số chỉ định nghĩa cho CEU.
- Số lượng nguồn nhiễu và công suất của từng nguồn là như nhau cho cả 2 giai đoạn.

Trong các kết quả gần đây, chúng tôi đã mô hình nguyên lý hoạt động 2 pha cho đường uplink [17]. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mô hình hóa đường downlink bằng cách theo sát các khuyến nghị của 3GPP. Thông qua các kết quả phân tích và mô phỏng, bài báo đưa 2 kết luận đáng lưu ý về hiệu suất của mạng trên đường downlink như sau:

- Việc tăng công suất của trạm phát đôi khi làm giảm hiệu suất của người dùng. Điều này trái với quan điểm phổ biến là hiệu suất người dùng tỉ lệ thuận với công suất trạm phát.
- Hiệu suất của hệ thống tỉ lệ thuận với số lượng CEU. Điều này đối lập với kết luận trong Tài liệu [14] do các giả trong [14] chưa định nghĩa 2 pha hoạt động cho CCU.

II. MÔ HÌNH MẠNG

Trong bài báo này chúng ta sẽ xem xét một mô hình mạng trong đó vị trí các trạm phát được phân bố theo một phân bố không gian Poisson (PPP) với mật độ trạm là λ như Hình 2. Mỗi người dùng sẽ được giả thiết kết nối với trạm gần nhất. Hàm mật độ (PDF) của khoảng cách giữa người dùng và trạm kết nối là

$$f_R(r) = 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} \quad (1)$$

Với kỹ thuật tái sử dụng tần số mềm như mô tả ở Hình 1, một khối tài nguyên (RB) có thể được sử dụng như là 1 CC RB ở 1

cell và tái sử dụng như là 1 CE RB ở cell bên cạnh. Đặt P là công suất phát trên CC RB thì ϕP là công suất phát trên CE RB ($\phi > 1$).

Đặt θ là tập hợp các trạm nhiễu của một người dùng nào đó, θ_c và θ_e tương ứng là tập hợp các trạm nhiễu phát với công suất P và ϕP ($\theta_c \cup \theta_e = \theta$). Mật độ trạm phát trong θ_c và θ_e lần lượt là $\frac{\Delta-1}{\Delta}\lambda$ và $\frac{1}{\Delta}\lambda$; trong đó Δ được gọi là hệ số tái sử dụng tần số.

- Tại pha thiết lập: công suất nhiễu đo được trên kênh điều khiển là

$$I_0 = \sum_{j \in \theta} P g_{jz}^{(0)} r_{jz}^{-\alpha} \quad (2)$$

trong đó $g_{jz}^{(0)}$ và r_{jz} là độ lợi kênh và khoảng cách từ trạm nhiễu j đến người dùng z .

- Tại pha truyền tin: công suất nhiễu đo được trên kênh dữ liệu là

$$I = \sum_{j \in \theta_c} P g_{jz} r_{jz}^{-\alpha} + \sum_{j \in \theta_e} \phi P g_{jz} r_{jz}^{-\alpha} \quad (3)$$

Khi đó, SINR đo được ở người dùng trong 2 phase lần lượt là

- Tại pha thiết lập

$$SINR_0 = \frac{Pgr^{-\alpha}}{I_0 + \sigma^2} \quad (4)$$

trong đó r và g lần lượt là khoảng cách và độ lợi kênh giữa người dùng và trạm phát người dùng đó kết nối.

- Tại pha truyền tin. Do công suất phát để phục vụ CEU gấp ϕ lần công suất phát để phục vụ cho CCU, công suất tín hiệu nhận được ở CCU trong pha này là

$$SINR = \frac{Pgr^{-\alpha}}{I + \sigma^2} \quad (5)$$

và ở CEU là $\phi SINR$.

III. XÁC SUẤT VÙNG PHỦ

A. Định nghĩa

Đối với CCU, CCU được coi là trong vùng phủ sóng nếu SINR trên kênh điều khiển trong pha thiết lập lớn hơn SINR ngưỡng T và SINR trên kênh dữ liệu trong pha truyền tin lớn hơn ngưỡng phủ sóng \hat{T} . Do đó, xác suất vùng phủ đối với trường hợp CCU được định nghĩa như sau

$$\mathcal{P}_c(T, \lambda) = \mathbb{P}\left(SINR > \hat{T} | SINR_0 > T\right) \quad (6)$$

Trong trường hợp CEU, CEU trong vùng phủ sóng nếu SINR trên kênh điều khiển trong pha thiết lập nhỏ hơn SINR ngưỡng T và SINR trên kênh dữ liệu trong pha truyền tin lớn hơn ngưỡng phủ sóng \hat{T} . Xác suất vùng phủ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{P}_e(T, \lambda) = \mathbb{P}\left(\phi SINR > \hat{T} | SINR_0 < T\right) \quad (7)$$

B. Tính toán xác suất vùng phủ

a) Với CCU: Xác suất vùng phủ có thể được tính toán như sau $\mathcal{P}_c(T, \epsilon)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I} > \hat{T}, \frac{Pg^{(o)}r^{-\alpha}}{\sigma^2+I_0} > T\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I_0} > T\right)} \\ &= \frac{\int_0^\infty re^{-\pi\lambda r^2} e^{-\frac{(T+\hat{T})\sigma^2}{Pr^{-\alpha}}} \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\hat{T}I}{Pr^{-\alpha}} - \frac{TI_0}{Pr^{-\alpha}}}\right] dr}{\int_0^\infty re^{-\pi\lambda r^2} \left(e^{-\frac{T\sigma^2}{Pr^{-\alpha}}} \mathbb{E}\left[-\frac{TI_0}{Pr^{-\alpha}} dr\right]\right) dr} \end{aligned} \quad (8)$$

Tử số: : Giá trị kì vọng trong tử số của Phương trình 8 có thể được tính như sau

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(T, \hat{T}) \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{j \in \theta_c} \left(\hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz} + Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz}^{(o)}\right) - \sum_{j \in \theta_e} \left(\phi \hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz} + Tr^\alpha g_{jz} r_{jz}^{-\alpha} g_{jz}^{(o)}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Since each BS in θ_c is distributed independently to any BS in θ_e and all channels are independent Rayleigh fading channels,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{T}, T) &= \prod_{j \in \theta_c} \mathbb{E}\left[e^{-\left(\hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz} + Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz}^{(o)}\right)}\right] \\ &\quad \prod_{j \in \theta_e} \mathbb{E}\left[e^{-\left(\phi \hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz} + Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha} g_{jz}^{(o)}\right)}\right] \\ &= \prod_{j \in \theta_c} \mathbb{E}\left[\frac{1}{1 + \hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha}} \frac{1}{1 + Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha}}\right] \\ &\quad \prod_{j \in \theta_e} \mathbb{E}\left[\frac{1}{1 + \phi \hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha}} \frac{1}{1 + Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha}}\right] \end{aligned}$$

Sử dụng các tính chất của hàm Probability Generating Function [18] với biến số là r_{jz} trong miền θ_c and θ_e , $\mathcal{L}(\hat{T}, T)$

$$\begin{aligned} &= e^{-\frac{2\pi(\Delta-1)\lambda}{\Delta} \int_r^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+\hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha})(1+Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha})}\right] r_{jz} d(r_{jz})} \\ &\quad e^{-\frac{2\pi\lambda}{\Delta} \int_r^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+\phi \hat{T}r^\alpha r_{jz}^{-\alpha})(1+Tr^\alpha r_{jz}^{-\alpha})}\right] r_{jz} d(r_{jz})} \end{aligned} \quad (9)$$

Đặt $y = (r_{jz}/r)^2$, ta thu được

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{T}, T) &= e^{-\frac{\pi(\Delta-1)\lambda r^2}{\Delta} \int_1^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+\hat{T}y^{-\alpha/2})(1+Ty^{-\alpha/2})}\right] dy} \\ &\quad e^{-\frac{2\pi\lambda r^2}{\Delta} \int_1^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+\phi \hat{T}y^{-\alpha/2})(1+Ty^{-\alpha/2})}\right] dy} \\ &= \mathcal{L}(T, \hat{T}, \frac{\Delta-1}{\Delta}\lambda) \mathcal{L}(T, \phi \hat{T}, \frac{\lambda}{\Delta}) \end{aligned} \quad (10)$$

trong đó $\mathcal{L}(T, \hat{T}, \Delta) = e^{-\pi\Delta r^2 \int_1^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+\hat{T}y^{-\alpha/2})(1+Ty^{-\alpha/2})}\right] dy}$

Mẫu số: : Giá trị kì vọng ở mẫu số của Phương trình 8 là trường hợp đặc biệt của Giá trị kì vọng ở tử số khi $\hat{T} = 0$. Do

đó, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[-\frac{TI_0}{Pr^{-\alpha}} dr\right] &= \mathcal{L}(T, 0, \frac{\Delta-1}{\Delta}\lambda) \mathcal{L}(T, 0, \frac{\lambda}{\Delta}) \\ &= \mathcal{L}(T, 0, \lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

Do đó, xác suất vùng phủ đối với CCU là

$$\mathcal{P}_c(T, \epsilon) = \frac{\int_0^\infty re^{-\pi\lambda r^2} e^{-\frac{(T+\hat{T})\sigma^2}{Pr^{-\alpha}}} \mathcal{L}(T, \hat{T}, \frac{\Delta-1}{\Delta}\lambda) \mathcal{L}(T, \phi \hat{T}, \frac{\lambda}{\Delta})}{\int_0^\infty re^{-\pi\lambda r^2} e^{-\frac{T\sigma^2}{Pr^{-\alpha}}} \mathcal{L}(T, 0, \lambda) dr} \quad (12)$$

b) Với CEU: Xác suất vùng phủ của CEU được tính như sau $\mathcal{P}_e(T, \epsilon)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{\phi Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I} > \hat{T}, \frac{Pg^{(o)}r^{-\alpha}}{\sigma^2+I_0} < T\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I_0} < T\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I} > \frac{\hat{T}}{\phi}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I} > \frac{\hat{T}}{\phi}, \frac{Pg^{(o)}r^{-\alpha}}{\sigma^2+I_0} > T\right)}{1 - \mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I} > T\right) - \mathbb{P}\left(\frac{Pgr^{-\alpha}}{\sigma^2+I_0} > T\right)} \end{aligned} \quad (13)$$

Sử dụng các kết quả liên quan của CCU trong Phần III-B0a, đặc biệt các định nghĩa từ Phương trình 10, ta có xác suất vùng phủ của CEU như trong Phương trình 14.

$\mathcal{P}_e(T, \epsilon) =$

$$\frac{2\pi\lambda \int_0^\infty re^{-\pi\lambda r^2} \left[\begin{aligned} &e^{-\frac{\hat{T}r^\alpha}{\phi SNR}} \mathcal{L}\left(0, \frac{\hat{T}}{\phi}, \frac{\Delta-1}{\Delta}\lambda\right) \\ &\mathcal{L}\left(0, \hat{T}, \frac{1}{\Delta}\lambda\right) \\ &-e^{-\left(\frac{\hat{T}}{\phi}+T\right)\frac{r^\alpha}{SNR}} \\ &\quad \times \mathcal{L}\left(T, \frac{\hat{T}}{\phi}, \frac{\Delta-1}{\Delta}\lambda\right) \\ &\quad \times \mathcal{L}\left(T, \hat{T}, \frac{\lambda}{\Delta}\right) \end{aligned} \right] dr}{1 - 2\pi\lambda \int_0^\infty re^{-\pi\lambda r^2 - \frac{Tr^\alpha}{SNR}} \mathcal{L}(T, \lambda) dr} \quad (14)$$

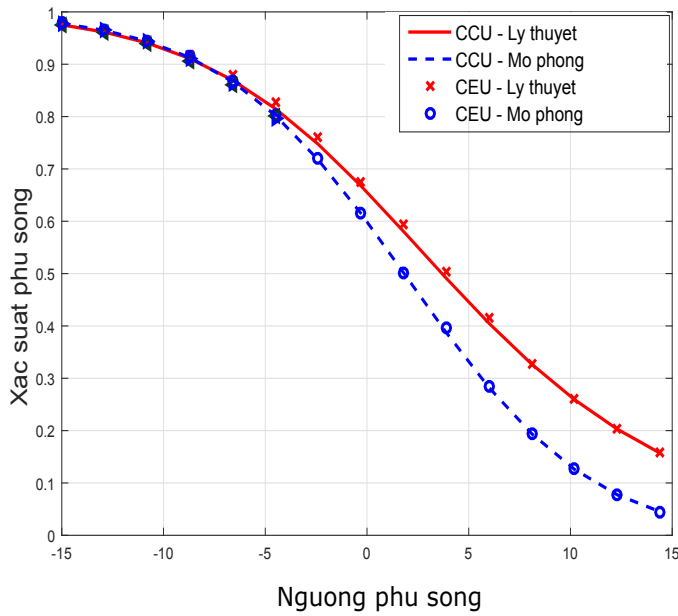
IV. MÔ PHỎNG VÀ PHÂN TÍCH

Trong Hình 3, kết quả phân tích được so sánh với kết quả mô phỏng để xác nhận tính chính xác của kết quả phân tích lý thuyết. Các kết quả trong Hình 1 được tạo ra với các tham số cơ bản $SNR = 10$ dB và $\alpha = 3.5$.

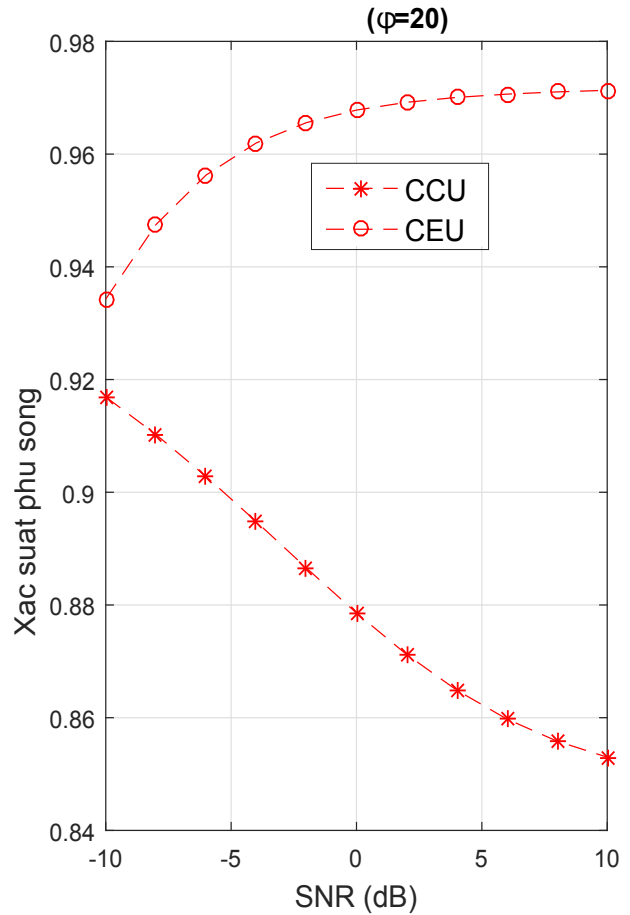
Hình 3 chỉ ra sự trùng khớp giữa kết quả phân tích lý thuyết và mô phỏng. Từ đó, ta có thể khẳng định sự đúng đắn của đánh giá lý thuyết.

Ảnh hưởng của tỉ số công suất giữa CEU và CCU. Phần này chúng ta sẽ xem xét về ảnh hưởng của tỉ số giữa công suất phục vụ của CEU và CCU lên hiệu suất của người dùng.

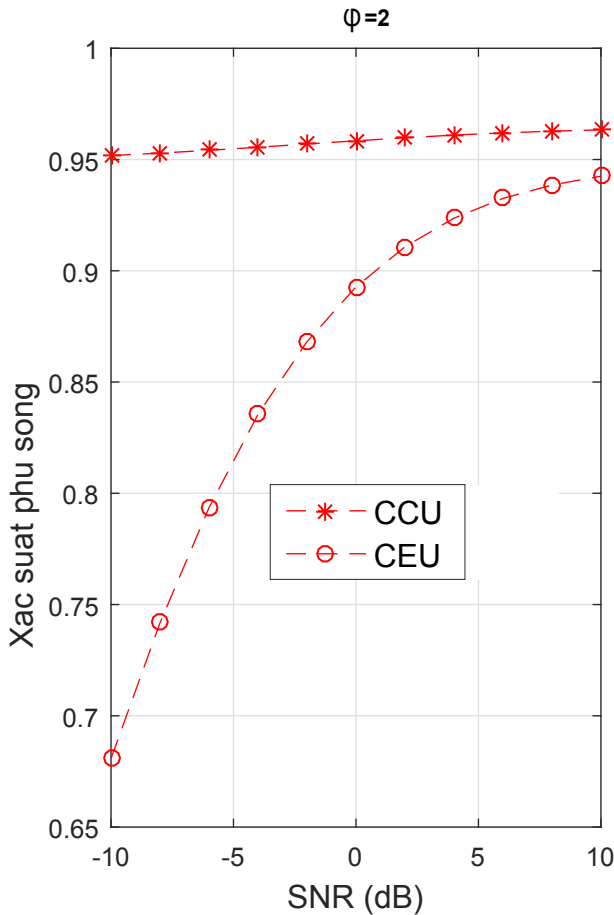
Lưu ý với mô hình tái sử dụng tần số như Hình 1, CCU và CEU đều chịu ảnh hưởng bởi nhiễu từ các trạm phát hoạt động trên CC RB và CE RB. Trong đó, công suất phát trên CE RB gấp ϕ lần công suất phát trên CC RB. Với giả thiết tỉ lệ công suất phát trên CE RB và CC RB ϕ cố định thì khi công suất



Hình 3: So sánh và mô phỏng



Hình 5: So sánh và mô phỏng



Hình 4: So sánh và mô phỏng

phát trên CC RB (SNR) tăng 1 lượng là δ thì công suất phát trên CE RB tăng 1 lượng là $\phi\delta$.

Đối với cả CCU và CEU, khi công suất phát (SNR) tăng lên 1 lượng là δ thì công suất phát của trạm nhiều phát trên CC RB và CE RB lần lượt tăng lên là δ và $\phi\delta$.

Đối với CCU được phục vụ trên CC RB, khi SNR tăng lên 1 lượng δ thì công suất của trạm phục vụ cũng chỉ tăng lên δ . Trong trường hợp $\phi = 2$, sự chênh lệch giữa công suất của các trạm nhiều phát trên CE RB và công suất của trạm phục vụ chỉ là 2 lần. Do đó, lợi ích của việc công suất tín hiệu phục vụ tăng do SNR tăng lớn hơn ảnh hưởng do công suất nhiễu tăng. Điều đó được thể hiện ở Hình 4 khi xác suất được phủ sóng của CCU tăng nhẹ. Đối với trường hợp $\phi = 20$, sự chênh lệch giữa công suất phát của trạm nhiều trên CE RB và công suất của trạm phục vụ là rất lớn, 20 lần. Do đó khi tăng SNR, việc tăng công suất của tín hiệu phục vụ không thể cân bằng được việc tăng của công suất nhiễu. Điều đó được thể hiện ở Hình 5 khi xác suất được phủ sóng của CCU giảm mạnh.

Đối với CEU được phục vụ trên CC RB, việc tăng công suất phát SNR lên δ đơn vị thì công suất phục vụ cũng tăng lên $\phi\delta$. Do đó, khi SNR tăng, tốc độ tăng của công suất tín hiệu phục vụ nhanh hơn công suất của tín hiệu nhiễu. Điều đó làm SINR của CEU và kéo theo là xác suất nằm trong vùng phủ sóng của CEU tăng. Điều đó được thể hiện của thể trong Hình 4 và 5: khi SNR tăng, xác suất nằm trong vùng phủ sóng của CEU tăng.

V. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng ta đã mô hình hóa kỹ thuật tái sử dụng tần số trong mạng LTE dựa theo mô hình xác suất thống kê, trong đó các trạm phát được phân bố ngẫu nhiên theo mô hình Poisson không gian. Các kết quả thu được về xác suất nằm trong vùng phủ sóng của người dùng được kiểm tra bằng mô phỏng Monte Carlo. Từ các kết quả phân tích, ta có thể kết luận được rằng việc tăng công suất phát có thể làm suy hao hiệu suất của người dùng.

TÀI LIỆU

- [1] *E-UTRA Base Station (BS) radio transmission and reception*, 3GPP Std. TS 36.104, 2010.
- [2] Cisco, "Cisco visual networking index: Global mobile data traffic forecast update, 2015 ? 2020," 2016.
- [3] 3GPP TS 36.213 version 8.8.0 Release 8, "LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical layer procedures," November 2009.
- [4] Huawei, "R1-050507 : Soft Frequency Reuse Scheme for UTRAN LTE," in *3GPP TSG RAN WG1 Meeting #41*, May 2005.
- [5] A. S. Hamza, S. S. Khalifa, H. S. Hamza, and K. Elsayed, "A Survey on Inter-Cell Interference Coordination Techniques in OFDMA-Based Cellular Networks," *IEEE Commun. Surveys & Tutorials*, vol. 15, no. 4, pp. 1642–1670, 2013.
- [6] S. E. Sagkriotis and A. D. Panagopoulos, "Optimal ffr policies: Maximization of traffic capacity and minimization of base station's power consumption," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 5, no. 1, pp. 40–43, Feb 2016.
- [7] F. N. C. INC., "Enhancing lte cell-edge performance via pdcc icic," 2011.
- [8] T. Novlan, J. Andrews, I. Sohn, R. Ganti, and A. Ghosh, "Comparison of Fractional Frequency Reuse Approaches in the OFDMA Cellular Downlink," in *Global Telecommunications Conf.(GLOBECOM 2010), 2010 IEEE*, Dec 2010, pp. 1–5.
- [9] D. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume II: General Theory and Structure*, second edition ed. Springer Science & Business Media, 2008.
- [10] H. ElSawy, E. Hossain, and M. Haenggi, "Stochastic Geometry for Modeling, Analysis, and Design of Multi-Tier and Cognitive Cellular Wireless Networks: A Survey," *IEEE Commun. Surveys Tutorials*, vol. 15, no. 3, pp. 996–1019, Third 2013.
- [11] M. Haenggi, *Stochastic Geometry for Wireless Networks*. Cambridge Univ. Press, November 2012.
- [12] T. D. Novlan, R. K. Ganti, A. Ghosh, and J. G. Andrews, "Analytical Evaluation of Fractional Frequency Reuse for OFDMA Cellular Networks," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 10, pp. 4294–4305, 2011.
- [13] Y. Lin and W. Yu, "Optimizing user association and frequency reuse for heterogeneous network under stochastic model," in *2013 IEEE Global Commun. Conf.(GLOBECOM)*, Dec 2013, pp. 2045–2050.
- [14] S. Kumar, S. Kalyani, and K. Giridhar, "Optimal design parameters for coverage probability in fractional frequency reuse and soft frequency reuse," *IET Communications*, vol. 9, no. 10, pp. 1324–1331, 2015.
- [15] C. Galiotto, N. K. Pratas, L. Doyle, and N. Marchetti, "Effect of los/nlos propagation on 5g ultra-dense networks," *Computer Networks*, vol. 120, pp. 126 – 140, 2017. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1389128617301536>
- [16] S. C. Lam, K. Sandrasegaran, and P. Ghosal, "Performance analysis of frequency reuse for ppp networks in composite rayleigh-lognormal fading channel," *Wireless Personal Communications*, Apr 2017.
- [17] S. C. Lam and K. Sandrasegaran, "Performance analysis of fractional frequency reuse in uplink random cellular networks," *Phys. Commun.*, vol. 25, no. P2, pp. 469–482, Dec. 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.phycom.2017.09.008>
- [18] M. A. Stegun and I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th ed. Dover Publications, 1972.