

**ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP LATTICE BOLTZMANN VÀ  
DYNAMIC MODE DECOMPOSITION TRONG NGHIÊN CỨU  
HIỆN TƯỢNG TÁCH DÒNG**

**NUMERICAL STUDY OF DYNAMIC STALL USING LATTICE  
BOLTZMANN METHOD AND DYNAMIC MODE  
DECOMPOSITION**

**Dương Việt Dũng<sup>1</sup>, Trịnh Minh Hoàng<sup>1</sup>, Nguyễn Văn Đức<sup>1</sup> và Nguyễn  
Đặng Thái Sơn<sup>1</sup>**

*<sup>1</sup>Viện Công nghệ Hàng không Vũ trụ, Đại học Công nghệ, Đại học Quốc  
gia Hà Nội, Hà Nội, Việt Nam*

**TÓM TẮT:** Dynamic stall là một hiện tượng xảy ra trên airfoil di chuyển trong dòng chảy rối, dẫn đến sự thay đổi lực nâng sinh ra. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày phương pháp Dynamic Mode Decomposition (DMD) trong phân tích các đặc điểm cơ bản của dòng chảy qua airfoil đối xứng NACA 0012 tại các góc thất tốc khác nhau, mô phỏng sử dụng phương pháp Lattice Boltzmann (LBM). Qua đó đưa ra nhận xét về tính chính xác của các phương pháp và thảo luận về các đặc điểm của hiện tượng dynamic stall dựa trên kết quả của DMD.

**Từ khóa:** Dynamic Mode Decomposition, Phương pháp Lattice Boltzmann, dynamic stall, airfoil đối xứng.

**ABSTRACT:** Dynamic stall is a phenomenon, happened on an airfoil traveling in the unsteady flow, resulted in a series of change in the lift. In this paper, we introduced the proceed of Dynamic Mode Decomposition extracting the key structure of the complex flow around a symmetric airfoil NACA 0012 at critical angles of attack based on Lattice Boltzmann Method. The accuracy of the reduced order method was confirmed and clarified based

on the results listed in literature; and discussion on the features of dynamic stall obtained via DMD was revealed.

**Keywords:** Dynamic Mode Decomposition, Lattice Boltzmann Method, dynamic stall, symmetric airfoil.

## 1. GIỚI THIỆU

### ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP LATTICE BOLTZMANN VÀ DYNAMIC MODE DECOMPOSITION TRONG NGHIÊN CỨU HIỆN TƯỢNG TÁCH DÒNG

Từ lâu, hiện tượng dynamic stall là một chủ đề nhận được nhiều sự quan tâm bởi sự ảnh hưởng to lớn của nó lên các phương tiện và kết cấu liên quan đến khí động lực học. Khái niệm “dynamic stall” thường được sử dụng để mô tả một chuỗi sự kiện tách dòng [1], xảy ra trên airfoil, hoặc cánh máy bay di chuyển trong dòng chảy rối ở góc tấn (AoA) lớn. Hiện tượng này xảy ra khi góc pitch của cánh máy bay biến thiên đột ngột và vượt góc thất tốc, dẫn tới hình thành một dòng xoáy trên bề mặt cánh. Dòng xoáy này dẫn đến sự biến thiên của lực nâng sinh ra bởi cánh, mà kết quả cuối cùng là hiện tượng thất tốc. Về ngành hàng không nói riêng, hiện tượng dynamic stall vừa có thể là tác nhân gây hại, vừa có thể là yếu tố có lợi. Ví dụ, dynamic stall xảy ra trên cánh quạt làm giảm tốc độ di chuyển của máy bay trực thăng [2]; trong khi đối với máy bay chiến đấu, dynamic stall lại là tác nhân có lợi khi sự tăng lực nâng tức thì sinh ra trong quá trình đó có lợi trong các tình huống tác chiến đặc biệt [3]. Hai ví dụ trên được đưa ra nhằm thể hiện tính cấp thiết trong việc nghiên cứu hiện tượng này, nhằm khai thác những đặc tính có lợi, cũng như ngăn chặn những ảnh hưởng có hại của nó.

Tuy nhiên, một vấn đề gặp phải trong khi nghiên cứu hiện tượng dynamic stall là bản chất phức tạp của dòng chảy. Sự phức tạp này, kể cả áp dụng các phương pháp số, được hỗ trợ bởi các máy tính hiện đại, vẫn là một trở ngại,

khi nó đòi hỏi tài nguyên máy tính khổng lồ, dẫn đến thời gian tính toán lâu, đặc biệt là mô phỏng hiện tượng trong thời gian thực, hay các mô phỏng cần thực hiện nhiều lần với các bộ tham số khác nhau. Đã có các phương pháp tiếp cận khác nhau trong xử lý vấn đề này. Một trong số chúng là áp dụng phương pháp Reduced Order Models (ROMs). Đây là phương pháp được sử dụng rộng rãi không chỉ trong xử lý dữ liệu dòng chảy, mà còn trong các ứng dụng khác ví dụ như xử lý hình ảnh, hay phân tích các hệ thống động lực học. Nguyên lý cơ bản của ROMs là tính toán một xấp xỉ của hệ thống, mà trong đó các bậc tự do không quan trọng bị loại bỏ tối đa, mà vẫn giữ được các tính chất và đặc điểm của hệ thống hoàn chỉnh, yêu cầu tài nguyên tính toán từ đó cũng được giảm. Nghiên cứu của Lieu và các cộng sự [4] là một ví dụ đã cho thấy khả năng của ROMs, khi nhóm nghiên cứu đã tính toán thành công xấp xỉ của một mô hình máy bay F-16 từ 2.1 triệu bậc tự do xuống 90 bậc tự do.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã sử dụng phương pháp Dynamic Mode Decomposition (DMD), là một nhánh của ROMs, để phân tích các đặc điểm của hiện tượng dynamic stall. Đặc điểm nổi bật của DMD là khả năng phân tích trường dữ liệu dưới dạng các modes, trong đó mỗi modes chứa các đặc điểm về tần số và xu hướng tăng (giảm) của trường dữ liệu. Qua đó, các đặc điểm về không gian – thời gian của hệ thống có thể được xác định và phân tích.

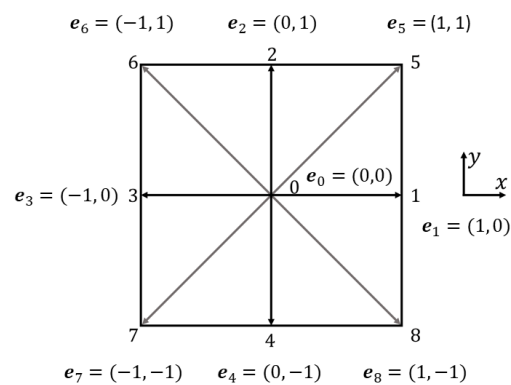
Cụ thể, chúng tôi sử dụng DMD để phân tích dữ liệu không gian theo thời gian của trường xoáy xung quanh một airfoil 2D đối xứng NACA-0012 tại các góc thất tốc. Bằng các modes thu được từ DMD, chúng tôi sẽ xác định các đặc điểm trong quá trình hình thành và phân tách của dòng xoáy đầu cánh – nguyên nhân gây ra hiện tượng thất tốc. Các dữ liệu này thu được thông qua phương pháp Lattice Boltzmann (LBM). Chúng tôi lựa chọn phương pháp này dựa trên các đặc điểm nổi trội của nó so với các phương pháp CFD

truyền thống, đặc biệt là sự đơn giản của nó trên khía cạnh thuật toán. Điều này giúp việc xây dựng framework LBM-DMD trở nên thuận tiện cho việc nghiên cứu, và đặc biệt đảm bảo tính đồng nhất về dữ liệu.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày về phương pháp Lattice Boltzmann (LBM). Trình bày về thuật toán Dynamic Mode Decomposition (DMD). Trình bày tóm tắt kết quả kiểm định kết quả của phương pháp Lattice Boltzmann và DMD; đưa ra nhận xét về dynamic mode dựa trên kết quả DMD và thảo luận về việc xây dựng lại hiện tượng tách dòng dựa trên DMD.

## 2. PHƯƠNG PHÁP LATTICE BOLTZMANN

Trong suốt hai thập kỷ qua, phương pháp Lattice Boltzmann đã chứng minh được độ chính xác trong khả năng mô hình hóa hệ phương trình Navier-Stokes và mô phỏng các hệ thống dòng chảy phức tạp. Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu về phương pháp Lattice Boltzmann, cũng như trình bày thuật toán của phương pháp.



Hình 1. Mô hình D2Q9.

Phương pháp Lattice Boltzmann, dựa trên ý tưởng thuyết động lượng khí của Ludwig Boltzmann, coi dòng chảy khí, hay chất lỏng là tập hợp vô số các hạt phần tử chuyển động ngẫu nhiên [5]. Sự trao đổi động lượng và năng lượng giữa các dòng chuyển động của hạt phần tử và sự va chạm giữa chúng được mô hình hóa dựa trên phương trình động học Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \Omega \quad (2.1)$$

Trong đó  $f(\mathbf{x}, t)$  là hàm phân bố hạt,  $\mathbf{u}$  là vận tốc hạt và  $\Omega$  là toán tử va chạm. Dựa trên ý tưởng đó, phương pháp Lattice Boltzmann lập mô hình dòng chảy dưới dạng các hạt phân tử lan truyền trên một mạng lưới rời rạc. Trên mô hình 2D, các hạt phân tử này lan truyền theo chín phương, tương ứng với chín vector vận tốc vi mô (microscopic velocities)  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 0, \dots, 8$ ). Mô hình này được gọi là mô hình D2Q9, được mô tả trong Hình 1, cũng là mô hình được chúng tôi sử dụng trong nghiên cứu này.

Mỗi hạt phân tử trên mạng lưới này được liên kết với một hàm phân bố xác suất rời rạc  $f_j(\mathbf{x}, t)$  ( $j = 0, \dots, 8$ ), thể hiện xác suất mà hạt phân tử đang xét lan truyền theo một trong chín phương bất kỳ. Tổng giá trị của các hàm này được gọi là mật độ chất lỏng vi mô (macroscopic fluid density):

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=0}^8 f_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

và vận tốc vĩ mô (macroscopic velocity)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  là trung bình của các vector vận tốc vi mô  $\mathbf{e}_j$ , trong đó các hàm phân bố  $f_j$  đóng vai trò là trọng số:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{j=0}^8 c f_j \mathbf{e}_j \quad (2.3)$$

Các bước lan truyền và va chạm của hạt phân tử trên mạng lưới được tính như sau, trong đó vế trái biểu diễn sự lan truyền và vế phải biểu diễn sự va chạm:

$$f_j(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_j\Delta t, t + \Delta t) - f_j(\mathbf{x}, t) = -\frac{[f_j(\mathbf{x}, t) - f_j^{eq}(\mathbf{x}, t)]}{\tau} \quad (2.4)$$

Trong đó,  $\tau$  là thời gian nghỉ (relaxation time) để hạt phân tử đạt đến trạng thái cân bằng,  $f_j^{eq}(\mathbf{x}, t)$  là hàm phân bố cân bằng được tính như sau:

$$f_j^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho w_j \left[ 1 + 3 \frac{\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{u}}{c} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{u})^2}{c^2} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right] \quad (2.5)$$

với trọng số  $w_j$  có giá trị bằng  $4/9$  tại  $j = 0$ , bằng  $1/9$  tại  $j = 1/4$  và bằng  $1/36$  tại  $j = 5/8$ ;  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  được gọi là vận tốc âm thanh của mạng tinh thể.

Tóm lại, thuật toán Lattice Boltzmann được thực hiện theo trình tự như sau [6]:

1. Thiết lập giá trị đầu cho các tham số  $\rho, \mathbf{u}, f_j, f_j^{eq}$ .
2. Tính  $f_j^*$  sử dụng phương trình (2.4), trong đó dấu \* thể hiện bước lan truyền của hạt với hàm phân bố  $f_j$  đến vị trí mới theo phương  $\mathbf{e}_j$ .
3. Từ  $f_j^*$  tính được ở bước 2, tính  $\rho$  và  $\mathbf{u}$  như trong công thức (2.2) và (2.3)
4. Tính  $f_j^{eq}$  sử dụng công thức (2.5).
5. Cập nhật hàm phân bố  $f_j$  tại vị trí mới sử dụng công thức (2.4).
6. Lặp lại từ bước 2 đến bước 5.

Trong mục 4.1 của bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả của phương pháp Lattice Boltzmann trong quá trình sinh dữ liệu đầu vào cho thuật toán DMD, cũng như kiểm định tính chính xác của thuật toán.

### 3. THUẬT TOÁN DYNAMIC MODE DECOMPOSITION

Dynamic Mode Decomposition (DMD) được công bố bởi P.Schmid [7] vào năm 2010, với mục đích ban đầu phân tích các dòng chảy phức tạp dưới dạng các mode mang đặc điểm không - thời gian đặc trưng. Kết hợp và bổ sung bởi các nghiên cứu về mặt toán học, phương pháp này đã thể hiện khả năng ưu việt trong phân tích nhiều thí nghiệm phức tạp của cơ học chất lỏng. Trong phần này, chúng tôi sẽ làm rõ đặc điểm của DMD trong khả năng xấp xỉ dữ liệu dưới dạng các modes, đồng thời trình bày về thuật toán DMD được áp dụng trong nghiên cứu này.

Xét một tập các dữ liệu theo thời gian không thứ nguyên, gọi là các “snapshot”,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . Mỗi snapshot  $\mathbf{v}_i$  là một vector cột ( $m \times 1$ ) chứa dữ liệu tương ứng với mốc thời điểm  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Trong đó,  $m$  là số điểm dữ liệu trong không gian được lưu trong mỗi snapshot và  $n$  là tổng số snapshot được xét, tương ứng với  $n$  thời điểm lấy mẫu, từ  $t_1$  đến  $t_n$ , cách đều nhau một bước thời gian  $\Delta t$ .

Biểu diễn chuỗi snapshot này dưới dạng ma trận, đặt là  $V_1^n$ , thu được:

$$V_1^n = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad (3.1)$$

Trong đó,  $V_1^n$  ( $m \times n$ ) là ma trận mà trong đó mỗi cột của nó là một snapshot  $\mathbf{v}_i$ , quy ước chỉ số dưới, ở đây là 1 và chỉ số mũ, ở đây là  $n$ , thể hiện chỉ số của snapshot đầu và snapshot cuối của chuỗi. Xét các snapshot, thừa nhận tồn tại một liên kết tuyến tính (linear mapping)  $A$  chưa biết, tạo ra mối liên hệ tuyến tính giữa snapshot  $v_i$  và snapshot liền kề  $v_{i+1}$ :

$$\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i \quad (3.2)$$

Coi  $A$  là không đổi giữa các cặp snapshot liền kề. Như vậy, áp dụng phương trình (3.2) dưới dạng ma trận, rút ra [8]:

$$AV_1^{n-1} = V_2^n \quad (3.3)$$

Khi này, nhiệm vụ của DMD là tính một xấp xỉ của  $A$ . Cụ thể, output của thuật toán DMD chính là các trị riêng và các vector riêng tương ứng của  $A$ , hay còn được gọi là các DMD eigenvalues và các DMD modes. Có hai hướng tiếp cận trong việc xây dựng thuật toán, tùy theo kích cỡ của dữ liệu, độ tối ưu hay mục đích nghiên cứu, bao gồm: phương pháp Arnoldi và phương pháp singular value decomposition (SVD) - based. Trong dung lượng của bài báo, chúng tôi sẽ giới thiệu và trình bày thuật toán DMD dựa trên phương pháp SVD – một phương pháp trong đại số tuyến tính.

Ý tưởng chính của phương pháp SVD - based trong DMD là tính xấp xỉ một

hình chiếu của A lên Proper Orthogonal Decomposition modes, hay POD modes. Chúng tôi lựa chọn phương pháp SVD - based trong xây dựng thuật toán DMD dựa trên khả năng xấp xỉ thông qua rút gọn chiều của ma trận, qua đó giảm lượng thông tin nhiễu trong tập dữ liệu. Chúng tôi sẽ giới thiệu qua về SVD cũng như POD modes trong thuật toán dưới đây.

Các bước của thuật toán DMD theo SVD - based được trình bày như sau:

Trước hết, chúng tôi tính SVD của ma trận  $V_1^{n-1}$  [8]:

$$V_1^{n-1} = U\Sigma V^T \quad (3.4)$$

Trong đó,  $^T$  thể hiện sự chuyển vị liên hợp, U là ma trận ( $m \times r$ ),  $\Sigma$  là ma trận ( $r \times r$ ), và  $V^T$  là ma trận ( $r \times n$ ). Ở đây,  $r$  là rank của ma trận xấp xỉ  $V_1^{n-1}$ ,  $r \leq \min(n, m)$ , các cột của U và các hàng của  $V^T$  lần lượt là các vector riêng trái và phải của  $V_1^{n-1}$ , tương ứng với các trị riêng là các giá trị nằm trên đường chéo chính của ma trận đường chéo  $\Sigma$ . Các cột của U là các vector được gọi là POD modes. Ngoài ra, các cột này còn có tính trực giao, do đó  $U^T U = I$ , tương tự,  $V^T V = I$ . [8]. Từ phương trình (3.3) và (3.4),  $V_2^n$  có thể được viết như sau:

$$V_2^n = AU\Sigma V^T \quad (3.5)$$

Sau đó thực hiện tính một hình chiếu ( $r \times r$ ) của A trên POD modes:

$$\tilde{A} = U^T A U = U^T V_2^n \Sigma^{-1} \quad (3.6)$$

Thực hiện phân rã trị riêng, hay eigendecomposition ma trận  $\tilde{A}$  thu được:

$$\tilde{A}W = W\Lambda \quad (3.7)$$

Trong đó các cột của ma trận W và các giá trị nằm trên đường chéo chính của ma trận  $\Lambda$  chính là các vector riêng và các trị riêng tương ứng  $\lambda_k$  ( $1 \leq k \leq r$ ) của  $\tilde{A}$ , Theo Schmid (2010) [7], một phần các trị riêng đầu của A cần tìm (DMD eigenvalues) chính là trị riêng của hình chiếu của nó là  $\tilde{A}$ , trong



khi các vector riêng tương ứng của A (DMD modes) là các cột của ma trận  $\Phi$ :

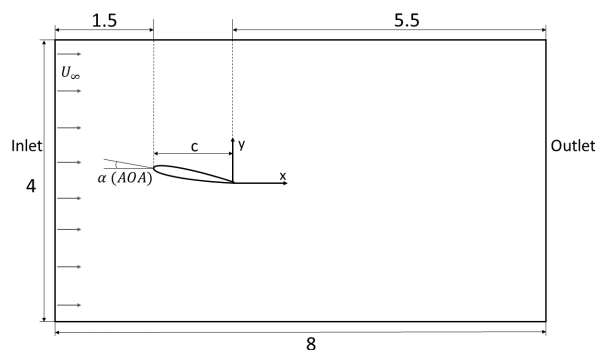
$$\Phi = V_2^n V \Sigma^{-1} W \quad (3.7)$$

Với các DMD modes và các DMD eigenvalues này, các đặc điểm không gian – thời gian của hệ thống đang xét có thể được xác định. Xét phổ  $\varepsilon_k$  đại diện cho độ tăng theo thời gian của giá trị cho DMD mode  $\phi_k$ , được tính theo công thức  $\varepsilon_k = \log(\lambda_k) / \Delta t$ . Theo đó, tần số của mỗi mode được đại diện bằng phần ảo của  $\varepsilon$  tương ứng; độ tăng/giảm của mỗi mode (đại diện cho phổ năng lượng của trường dòng) được đại diện bởi phần thực của  $\varepsilon$ .

## 4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

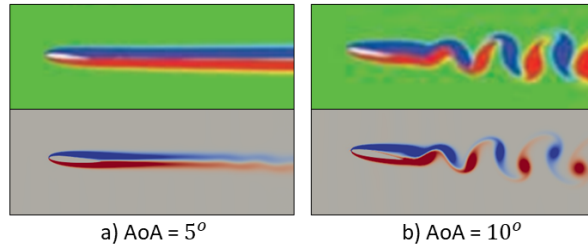
### 4.1. Kiểm tra độ chính xác của phương pháp Lattice Boltzmann

Trong mục này, chúng tôi sẽ tóm tắt quá trình xác minh kết quả của phương pháp Lattice Boltzmann trong tính toán dữ liệu đầu vào của DMD, từ đó rút ra nhận xét về độ chính xác và tin cậy của phương pháp trong vai trò là công cụ sinh dữ liệu cho DMD cũng như hệ quy chiếu. Cụ thể, chúng tôi sẽ trình bày sự so sánh giữa kết quả tính toán sử dụng phương pháp Lattice Boltzmann cho dòng chảy qua airfoil NACA 0012 tại các góc tấn 5 và 10 độ, với số  $Re = 1000$ , với kết quả thực nghiệm được trình bày trong Kurtulus (2015) [9] và Liu (2012) [10]. Kết quả đánh giá được dựa trên hai yếu tố: sự tương đồng về trường dòng và sự tương đồng với hệ số lực nâng trung bình  $\overline{C}_l$ .

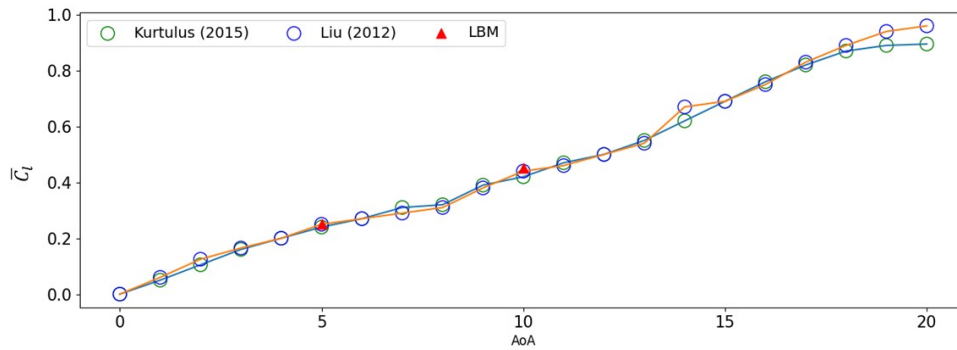


## Hình 2. Domain khảo sát.

Về tính toán, chúng tôi khảo sát trên một domain lưới đều gồm 2 triệu điểm lưới, trong đó  $N_x = 2000, N_y = 1000$  được chia theo chiều dài và chiều rộng ( $L_x = 8c, L_y = 4c$ ) của không gian tính toán. Điều kiện biên symmetry được sử dụng trường hai đường biên trên vào biên dưới của miền tính toán. Đầu vào Inlet của mô hình được xử lý dựa trên sự bảo toàn vận tốc và mật độ khối lượng cho trước của đầu vào mô hình, đã được làm rõ trong nghiên cứu của Zou (1997) [11]. Tại đầu ra Outlet của mô hình, một bước tính ngoại suy đơn giản được sử dụng. Phương pháp Interpolated bounce-back [12] được sử dụng để giải quyết vấn đề điều kiện biên trên bề mặt cong, phương pháp làm giảm sai số đáng kể so với phương pháp tiên nhiệm là Simple bounce-back [13]. Thuật toán được cài đặt để tính toán 120 bước thời gian không thứ nguyên, bắt đầu từ  $t_0^*=0$  với mỗi bước thời gian  $\Delta t^* = \frac{TU_\infty}{c} = 0.5$ . Biên dạng của airfoil NACA 0012 tại các góc pitch 5 và 10 độ được tính toán dưới dạng các điểm tọa độ phù hợp, sau đó được đưa vào domain. Vị trí của airfoil được đặt để khảo sát như Hình 2. Kết quả thu được thông qua phương pháp Lattice Boltzmann được đối chiếu với kết quả thực nghiệm trong các bài báo đã được công bố trước đó của Kurtulus [9] cũng như các kết quả của Liu [10]. Kết quả so sánh về trường dòng và hệ số lực nâng trung bình  $\bar{C}_l$  được trình bày trong Hình 3 và Hình 4. So sánh chỉ ra rằng, trường dòng thu được thông qua phương pháp Lattice Boltzmann có sự tương đồng với kết quả thực nghiệm thu của Kurtulus [9]. Đồng thời, hệ số lực nâng trung bình  $\bar{C}_l$  từ phương pháp Lattice Boltzmann cũng xấp xỉ so với kết quả tham chiếu. Cụ thể, hệ số lực nâng trung bình  $\bar{C}_l$  của LBM tại các góc tấn 5 và 10 độ lần lượt là 0.25 và 0.45, so với kết quả tham chiếu tương ứng với kết quả của Kurtulus [9] và Liu [10] lần lượt là 0.24 và 0.42; 0.25 và 0.44.



Hình 3. Trường dòng đi qua airfoil đối xứng NACA - 0012 ở góc tấn a) 5 độ và b) 10 độ tại  $Re = 1000$ , Kurtulus (2015) [9] (ảnh phía trên), phương pháp Lattice Boltzmann (ảnh phía dưới).



Hình 4. Đối chiếu hệ số lực nâng trung bình  $\bar{C}_L$  thu được từ phương pháp Lattice Boltzmann tại các góc tấn 5 và 10 độ với kết quả thực nghiệm của Kurtulus [9] và Liu [10].

Cùng với đó chúng tôi đánh giá độ hội tụ lưới cho phương pháp số LBM được áp dụng tại nghiên cứu này với các bộ lưới có độ phân giải khác nhau từ thấp đến cao cho airfoil NACA 0012 tại góc tấn 5 và 10 độ. Kết quả được thể hiện trong Bảng 1. Các kết quả được so sánh với độ phân giải lưới cao nhất và cho thấy rằng độ hội tụ lưới đã được đảm bảo. Qua đó giải thích lý do tại sao bộ lưới  $2000 \times 1000$  được sử dụng trong bài nghiên cứu này.

Bảng 1. Sự hội tụ của lưới.

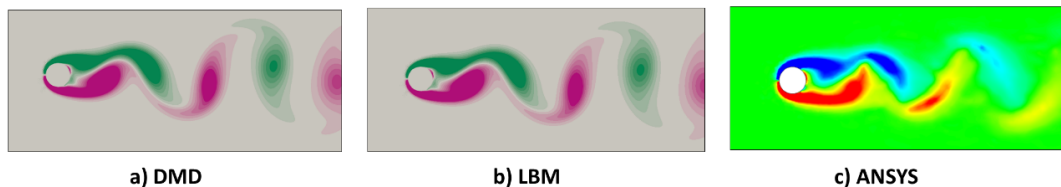
Độ phân giải lưới	$AOA = 5^\circ$				$AOA = 10^\circ$			
	$\bar{C}_D$	Error (%)	$\bar{C}_L$	Error (%)	$\bar{C}_D$	Error (%)	$\bar{C}_L$	Error (%)
$1.62 \times 10^6$	0.1363	5.57	0.2551	1.43	0.1825	3.87	0.4594	1.59

$2.00 \times 10^6$	0.1318	2.09	0.2534	0.75	0.1786	1.65	0.4557	0.77
$2.42 \times 10^6$	0.1296	0.38	0.2521	0.24	0.1762	0.28	0.4534	0.26
$2.88 \times 10^6$	0.1291	-	0.2515	-	0.1757	-	0.4522	-

Như vậy, từ kết quả kiểm định, có thể rút ra kết luận về độ chính xác và tin cậy cũng như độ hội tụ của lưới cho của phương pháp Lattice Boltzmann trong việc mô phỏng dữ liệu đầu vào cho thuật toán DMD.

#### 4.2. Đối chiếu kết quả của DMD với kết quả của phương pháp Lattice Boltzmann

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày quá trình nghiệm thu và xác minh tính chính xác của phương pháp DMD trong tính toán xấp xỉ dữ liệu dòng chảy dưới dạng các modes thông qua đối chiếu với kết quả thu được từ phương pháp Lattice Boltzmann. Tiêu chí đánh giá dựa trên sự tương đồng của trường dòng trong hai trường hợp khảo sát: trường dòng đi qua trụ tròn tại  $Re=100$  và trường dòng đi qua airfoil đối xứng NACA 0012 tại góc tấn  $10^\circ$ ,  $Re=1000$ , cũng là kết quả để khảo sát hiện tượng dynamic stall.

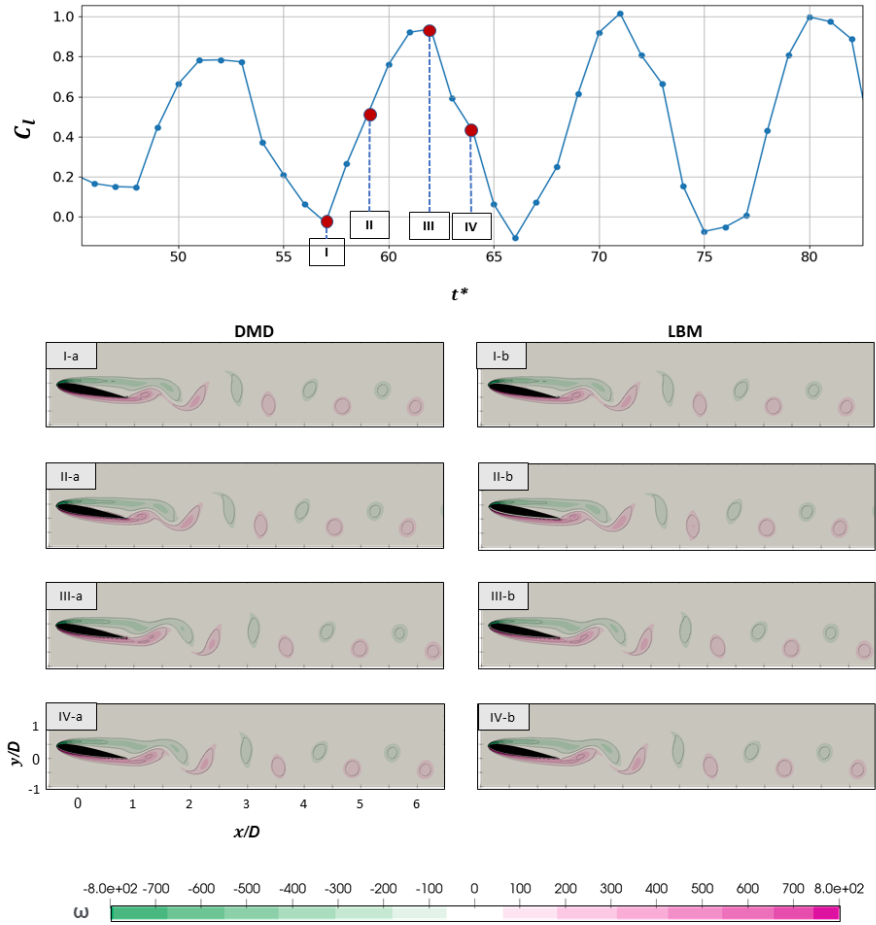


Hình 5. So sánh trường dòng qua trụ tròn tại  $Re=100$  giữa các phương pháp a) DMD, b) LBM và c) Phần mềm ANSYS [14].

Đối với trường dòng đi qua trụ tròn tại  $Re=100$ , đầu vào của thuật toán DMD là giá trị vận tốc trường dòng, được tính bằng phương pháp Lattice Boltzmann. Dữ liệu này được xử lý dưới dạng ma trận có chiều là  $(500000 \times 120)$ , tương ứng lần lượt với số điểm lưới trong domain khảo sát bằng phương pháp Lattice Boltzmann ( $N_x = 1000, N_y = 500$ ) và số bước thời gian lấy mẫu là 120 bước. Bước tính SVD trên ma trận dữ liệu này tính

một ma trận rút gọn có rank  $r = 8$ , tương đương với số DMD modes thu được. Các DMD modes này được sử dụng để tái tạo lại trường dòng. Kết quả này sau đó được đối chiếu với dữ liệu được thể hiện trong ma trận dữ liệu đầy đủ, hay kết quả thu được từ phương pháp Lattice Boltzmann cũng như kết quả sử dụng phần mềm ANSYS [14], thể hiện trong Hình 5. Kết quả cho thấy sự tương đồng đáng kể giữa các phương pháp, thể hiện tính chính xác của thuật toán DMD, cũng như chứng minh khả năng của thuật toán trong phát hiện và chiết xuất các đặc điểm chính của dữ liệu.

Tương tự, đối với trường dòng đi qua airfoil đối xứng NACA 0012 tại góc tấn 10 độ tại  $Re=1000$ , tính bằng phương pháp Lattice Boltzmann, đã được trình bày và kiểm định trong mục 4.1, ma trận dữ liệu đầu vào của DMD có chiều là  $(2000000 \times 120)$ . Bước tính SVD trên ma trận dữ liệu tính được một xấp xỉ với rank  $r = 50$ , tương ứng với 50 DMD modes. Trường dòng được tái tạo thông qua các DMD modes này sau đó được so sánh với kết quả đầy đủ như trong Hình 6.



Hình 6. Biểu đồ lực nâng theo thời gian và các so sánh giữa DMD và phương pháp Lattice Boltzmann tại các thời điểm.

Ở đây, dựa trên biểu đồ biến thiên hệ số lực nâng tính toán thông qua phương pháp Lattice Boltzmann, chúng tôi khảo sát và so sánh kết quả trường dòng tại 4 thời điểm trong cùng một chu kỳ biến thiên của hệ số lực nâng. Kết quả vẫn cho thấy sự xấp xỉ giữa hai phương pháp, tuy nhiên thí nghiệm này chứng minh rằng độ chính xác của thuật toán DMD vẫn bị ảnh hưởng nhiều vào tính chu kỳ của dữ liệu, phản ánh mối liên hệ chặt chẽ giữa DMD modes và chu kỳ riêng đã được giới thiệu trong mục 1.

## 5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã phát triển hai phương pháp số cho việc khảo sát hiện tượng tách dòng ở airfoil đối xứng NACA 0012. Phương pháp số

thứ nhất là phương pháp Lattice Boltzman dựa vào việc giải hai tiến trình collision và streaming giữa các Lattice đặt trong không gian tính toán. Tiến trình giải này là hoàn toàn độc lập và không phải giải phương trình Poisson cho biến vận tốc của trường dòng cho nên rất tiết kiệm thời gian tính toán. Tiếp theo từ các dữ liệu theo không gian và thời gian của phương pháp Lattice Boltzman, thuật toán DMD được phát triển để tái tạo lại trường tách dòng qua airfoil ở một góc tấn nhất định theo thời gian thực mà không cần đến bất kỳ một mô phỏng nào, qua đó tiết kiệm thời gian tính toán và có tiềm năng để áp dụng tại các trường hợp có góc tấn thay đổi tức thời trong các bài toán dòng chảy trong thực tế.

## **6. LỜI CẢM ƠN**

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội theo đề tài mã số CN20.45.

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] L. W. Carr (1988); “*Progress in Analysis and Prediction of Dynamic Stall*”, Journal of Aircraft, Vol. 25, No. 1, 6–17.
- [2] Barwey, D., Gaonkar, G. H. (1994); “*Dynamic-Stall and Structural Modeling Effects on Helicopter Blade Stability with Experimental Correlation*”, AIAA Journal, Vol. 32, No. 4, 811-819.
- [3] Harper, P.W. and Flanigan, R.E. (1950); “*The effect of rate of change of angle of attack on the maximum lift of a small model*”, NACA Technical note 2061.
- [4] Lieu, T., Farhat, C., Lesoinne, M. (2006); “*Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.195, Issues 41-43, 5730-5742.
- [5] Z. Guo, B. Shi, and N. Wang (2000); “*Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes Equation*”, Journal of Computational Physics. Vol. 165, Issue 1, 288-306.

- [6] Bao, Y.B., Meskas, J. (2011); "*Lattice Boltzmann Method for Fluid Simulations*", Technical Report, Courant Institute of Mathematical Science, New York University, New York.
- [7] P. J. Schmid (2010); "*Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data*", Journal of Fluid Mechanics, Vol.656, 5-28.
- [8] L. N. Trefethen, D. Bau III (1997); "*Numerical Linear Algebra*", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, p.7.
- [9] D. F. Kurtulus (2015); "*On the unsteady behavior of the flow around NACA 0012 airfoil with steady external conditions at  $Re = 1000$* ", International Journal of Micro Air Vehicles, Vol.7, No.3, 301–326.
- [10] Liu, Y., Li, K., Zhang, J., Wang, H. and Liu, L. (2012); "*Numerical bifurcation analysis of static stall of airfoil and dynamic stall under unsteady perturbation*", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol.17, 3427–3434
- [11] Zou, Qisu, Xiaoyi He (1997); "*On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model*", Phys. Fluids, Vol. 9, No. 6, 1591-1598.
- [12] A. J. Ladd (1994); "*Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation*", J. Fluid Mech, vol. 271, 285–309.
- [13] M. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand (2001); "*Momentum transfer of a boltzmann-lattice fluid with boundaries*," Phys. Fluids, Vol.13, No.11, 3452–3459.
- [14] <https://skill-lync.com/student-projects/Simulating-two-dimensional-flow-over-a-cylinder-to-visualize-the-von-Karman-vortex-street-at-Re-100-using-ANSYS-Fluent-41236>.